数理解析研究所講究録
375巻 1980年 159-164

Einstein空間上のインスタントン

京大 数理研　村瀬元彦

$\mathbb{CP}^2$ や K3 曲面などの Einstein 空間上には，その計量を用いて $SO(3)$-instanton が構成できることを示す．

§. 主束上の接続形式が調和方程式を満たすとき，それを instanton と呼ぶ――

これまでに知られているのは，S^4 上の主束に対するものに限られていた．

記号．M：向きづけられた4次元 Riemann 多様体

P：M 上の $SO(n)$-主束

$\mathfrak{g}_P$：$SO(n)$ の adjoint 表現に同伴した $\mathfrak{so}(n)$-ベクトル束．但し $\mathfrak{so}(n)$ は反対称 $n\times n$ 行列全体の為すリー環

ω：P 上の接続形式

$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega]$：曲率形式

/

Λ^p：M上の p-formsの為すベクトル束．

Pの束自己同型をゲージ変換という．$\omega\in \mathfrak{g}_P\otimes\Lambda^1$，$\Omega\in \mathfrak{g}_P\otimes\Lambda^2$ と見なされる．それぞれ $\mathfrak{g}_P$-係数のM上の微分形式である．

ゲージ不変なΩのノルムを，Hodge star 作用素を用いて $\|\Omega\|^2 = -\int_M \mathrm{trace}\,\Omega\wedge *\Omega$ によって定義する．

変分問題 $$\delta(\|\Omega\|^2) = 0$$ から導かれる微分方程式を調和方程式，あるいは Yang-Mills 方程式という．そして，その解を与える接続ωのことを，調和接続，あるいは instanton と呼ぶ．

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_M \mathrm{trace}\,\Omega\wedge\Omega$$ が主束Pの第2 Chern 数であることに注意すれば，

<u>Lemma. 1.</u> $*\Omega = \pm\Omega$ なる接続ωは調和である．

Λ^2 上では $*^2=1$ ゆえ，$*$ の固有値 ± 1 に属する Λ^2 の固有空間への分解を $\Lambda^2 \cong \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$ とする．2-form α に対し，$*\alpha = \alpha \iff \alpha\in\Lambda^2_+$．

§. Einstein 空間上に $\mathfrak{g}_P \otimes \Lambda^2_+$ の section をつくる —

Mは oriented だから，接束に同伴する主束は $SO(4)$-束である．それをBと書く．Riemann計量によって，接束とΛ^1とを同一視する．Λ^pは計量をもったベクトル束であり，BはΛ^pに直交変換として作用する．

<u>Lemma 2.</u> $\Lambda^2 \cong \mathfrak{g}_B$.

<u>証</u>. BのΛ^2への作用が adjoint 表現で得られることをみる．

Λ^1の local orthonormal base を e_1, e_2, e_3, e_4 とする．Λ^2 の local base は $\langle e_\mu \wedge e_\nu \rangle_{\mu<\nu}$ である．同型

$$\varphi : \Lambda^2 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_B$$

を，

$$e_1\wedge e_2 \longmapsto \left[\begin{array}{cc|cc} & 1 & & \\ -1 & & & \\ \hline & & & \\ & & & \end{array}\right] \qquad e_3\wedge e_4 \longmapsto \left[\begin{array}{cc|cc} & & & \\ & & & \\ \hline & & & 1 \\ & & -1 & \end{array}\right]$$

$$e_1\wedge e_3 \longmapsto \left[\begin{array}{cc|cc} & & 1 & \\ & & & \\ \hline -1 & & & \\ & & & \end{array}\right] \qquad e_2\wedge e_4 \longmapsto \left[\begin{array}{cc|cc} & & & \\ & & & 1 \\ \hline & & & \\ & -1 & & \end{array}\right]$$

$$e_1\wedge e_4 \longmapsto \left[\begin{array}{cc|cc} & & & 1 \\ & & & \\ \hline & & & \\ -1 & & & \end{array}\right] \qquad e_2\wedge e_3 \longmapsto \left[\begin{array}{cc|cc} & & & \\ & & 1 & \\ \hline & -1 & & \\ & & & \end{array}\right]$$

によって定めれば，$g \in B$ に対して，

$$g(e_\mu \wedge e_\nu) \underset{def}{=} (g e_\mu)\wedge(g e_\nu)$$
$$= g\cdot(\varphi(e_\mu\wedge e_\nu))\cdot g^{-1}$$

となる. ▨

直和分解 $\Lambda^2 = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$ はB-不変である. また, $so(4) \cong so(3) \oplus so(3)$ に対応して, 各 $\Lambda^2_\pm$ は $so(3)$-束である.

3次元ベクトル束 Λ^2_+ に同伴するSO(3)-主束を P で表わす. SO(3) の3次元表現 $SO(3) \hookrightarrow GL(3)$ は adjoint 表現と同値だから,

<u>Lemma. 3</u>. $\Lambda^2_+ \cong \mathfrak{g}_P$.

さて,

$\alpha : \Lambda^2 \xrightarrow{\sim} \Lambda^{2*}$ を内積によって定まる同型,

$\beta : \Lambda^1 \otimes \Lambda^1 \longrightarrow \Lambda^2$ を外積によって定まる自然な写像

とする. Riemann曲率形式 $R = \{R_{ijkl}\}$ は,

$(\Lambda^1 \otimes \Lambda^1) \otimes \Lambda^2$ の section である. 即ち, $\Lambda^1 \otimes \Lambda^1$ 係数のM上の2-form.

$$(\Lambda^1 \otimes \Lambda^1) \otimes \Lambda^2 \xrightarrow{\beta \otimes id} \Lambda^2 \otimes \Lambda^2 \xrightarrow{\alpha \otimes id} \Lambda^{2*} \otimes \Lambda^2 \cong Hom(\Lambda^2, \Lambda^2)$$

による R の image を $\mathcal{R}$ と書く. Λ^1 の orthonormal base

によって $\mathcal{R}$ を表わせば,

$$\mathcal{R}(e_i \wedge e_j) = \frac{1}{2} \sum_{k,l} R_{ijkl}\, e_k \wedge e_l .$$

直和分解 $\Lambda^2 = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$ に対応して

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} A \in \mathrm{Hom}(\Lambda^2_+, \Lambda^2_+) \\ B \in \mathrm{Hom}(\Lambda^2_-, \Lambda^2_+) \\ C \in \mathrm{Hom}(\Lambda^2_-, \Lambda^2_-) \end{array}$$

とブロック別けできる. B を具体的に計算することにより,

<u>Lemma. 4.</u> M : Einstein $\Longleftrightarrow$ $B = 0$.

したがって, M が Einstein であるとき

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_+ \oplus \mathcal{R}_-$$
$$\mathcal{R}_+ \in \mathrm{Hom}(\Lambda^2_+, \Lambda^2_+)$$
$$\mathcal{R}_- \in \mathrm{Hom}(\Lambda^2_-, \Lambda^2_-)$$

と分解される. 計量によって $\Lambda^2_+ \cong \Lambda^{2*}_+$ と見れば,

$$\mathcal{R}_+ \in \mathfrak{g}_P \otimes \Lambda^2_+ .$$

$\Gamma \in \mathfrak{g}_B \otimes \Lambda^1$ を Riemann 接続とする. Riemann 曲率は $\mathfrak{g}_B \otimes \Lambda^2$ の元と見なせるが, それは $\mathcal{R}$ に他ならない. このとき,

$$\mathcal{R} = d\Gamma + \frac{1}{2}[\Gamma, \Gamma] .$$

直和分解 $\mathfrak{g}_B \cong \Lambda^2 \cong \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$ に対応して

$$\Gamma = \Gamma_+ \oplus \Gamma_- , \qquad \Gamma_\pm \in \Lambda^2_\pm \otimes \Lambda^1$$

とすれば,

$$\mathcal{R}_\pm = d\Gamma_\pm + \frac{1}{2}[\Gamma_\pm, \Gamma_\pm]$$

である. したがって, Γ_+ は,

$$\begin{cases} \Gamma_+ \in \mathfrak{g}_P \otimes \Lambda^1 \\ d\Gamma_+ + \frac{1}{2}[\Gamma_+, \Gamma_+] = \mathcal{R}_+ \in \mathfrak{g}_P \otimes \Lambda^2_+ \end{cases}$$

$$(\text{即ち} \quad *\mathcal{R}_+ = \mathcal{R}_+)$$

を満たすので, $SO(3)$-instanton である.

Γ_-によっても, 同様に $SO(3)$-instanton が構成出来る.

文献

Atiyah - Hitchin - Singer : Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry.
Proc. R. soc. Lond. A. 362. 425-461 (1978).